

2020年 東大数学 文系第1問

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ とおく、便利なので、
 与えず、 $f(x)$ とおく

$f'(x) = 3x^2 - 6ax$
 $= 3x(x - 2a)$

条件1

$\Leftrightarrow (f(x) \text{ の極値}) = 0$
 かつ、与えず、増減表、

増減表は

x	$\dots$	0	$\dots$	$2a$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $f(0)$	$\searrow$	極小 $f(2a)$	$\nearrow$

また、 $a > 0$ とおく。

条件1 を満たすためには、 $f(0) = 0$ または $f(2a) = 0$ とおく。

(i) $f(0) = 0$ のとき、

$f(0) = 0^3 - 3 \times a \times 0^2 + b = 0$

$b = 0$ とおくが、仮定より $b > 0$ かつ $a > 0$ 、不適

$\therefore$ の路線は消えた。

(ii) $f(2a) = 0$ のとき、

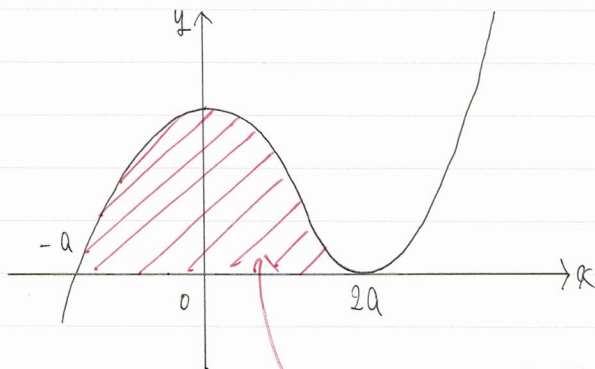
$f(2a) = (2a)^3 - 3a \times (2a)^2 + b$
 $= b - 4a^3 = 0$

$\therefore b = 4a^3$ a の値が決定

よって、以下は $b = 4a^3$ を代入して進める

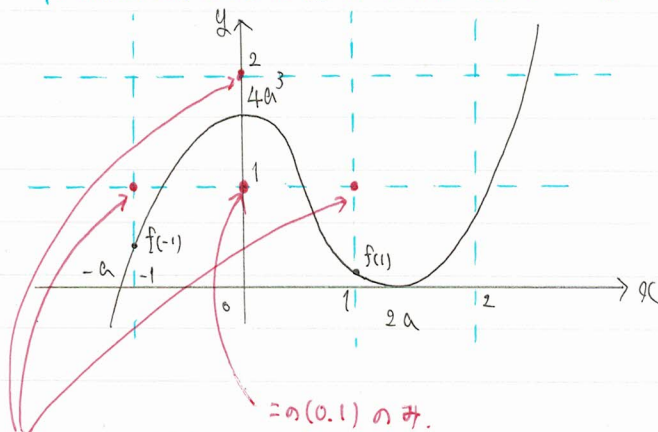
すると、 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ と決定できる。

$f(x) = (x+a)(x-2a)^2$ を考慮すると、グラフの
 概形は下のよう。



この領域(境界含まず)
 に格子点が1つだけ
 入ればよい。

格子点を書き込んで、下のようになればよい。



(0,1) の隣の3点が
 領域外にある。

(0,0) は境界上にあり、
 必ず領域外である。

$f(-1) \times f(1)$ は
 いくつ小さくても
 構わない

この条件を立式すると、

① $f(-1) < 1$ か
 ② $1 < f(0) < 2$ か
 ③ $f(1) < 1$ である。

② $1 < f(0) < 2$ より $1 < 4a^3 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ②'

③ $f(1) < 1$ より

$1 - 3a + 4a^3 < 1 \quad 4a^3 - 3a < 0 \quad a(4a^2 - 3) < 0$

ここで

②'より $4a^2 < 4 \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$ であり、 $16 < 27$ の両辺を $\frac{1}{3}$ 乗した
 $2^{\frac{4}{3}} < 3$ を利用すると、

$4a^2 < 2^{\frac{4}{3}} < 3$ かつ、 $4a^2 - 3 < 0$ が示せ。

$a > 0$ かつ、 $f(1) < 1 \Leftrightarrow a(4a^2 - 3) < 0$ は

②' の範囲の a で必ず成立する。

① $f(-1) < 1$ より

$-1 - 3a + 4a^3 < 1 \Leftrightarrow 4a^3 - 3a - 2 < 0$ とおく。

③'から $4a^3 - 3a < 0$ が示されているので、①も成立する。

以上より、 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < a < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を満たす a であることは問題を満たす。